

Knæk og bræk

– Løsninger til sidste bloks opgaver

Sune Precht Reeh

Jeg antager som udgangspunkt at pinden i opgaverne er uden tykkelse og er formet som et ret linjestykke af længde ℓ .

Antag at pinden er blevet delt i tre segmenter af længde $a \leq b \leq c$, sådan at $a + b + c = \ell$. De tre stykker vil kunne samles til en trekant hvis og kun hvis *trekantsuligheden* $c < a + b$ er opfyldt (hvor c er det længste stykke). Der gælder $c < a + b$ hvis og kun hvis

$$c < \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}\ell.$$

Da c er det længste stykke, er det således nødvendigt og tilstrækkeligt at alle tre stykker er mindre end $\frac{1}{2}\ell$.

Løsning af præmieopgaven: Famøs årgang 22, nr. 1

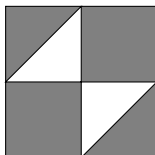
Lad $X, Y \in [0, 1]$ være stokastiske variable der angiver hvor langt oppe (relativt set) at pinden skal saves over: Givet værdier af X og Y , lægger vi snit i punkterne $X \cdot \ell$ og $Y \cdot \ell$ på pinden.

X og Y er ifølge opgaven uafhængige, og jeg antager at der desuden menes i opgaven at X og Y er ligefordelte på $[0, 1]$. Heraf slutter vi straks at parret (X, Y) er ligefordelt på enhedskvadratet $[0, 1]^2$. Sandsynligheden for at (X, Y) ligger i en given (målelig) delmængde $A \subseteq [0, 1]^2$, vil dermed være lig

$$P((X, Y) \in A) = \frac{\mu(A)}{\mu([0, 1]^2)} = \mu(A) = \text{areal}(A),$$

hvor μ er Lebesgue-målet på $\mathbb{R}^2$.

Lad $A \subseteq [0, 1]^2$ være mængden af (X, Y) -udfald hvor det længste stykke af pinden har længde mindre end $\frac{1}{2}\ell$. Vi ønsker da at

Figur 1 Mængden B af ugunstige udfald

bestemme arealet af A , men vi vil i første omgang betragte komplementet $B := [0, 1]^2 \setminus A$ i stedet. B består af de par (X, Y) hvor det længste stykke har længde mindst $\frac{1}{2}\ell$, og dette kan finde sted på tre måder:

Såfremt $X, Y \leq \frac{1}{2}$, vil begge snitpunkter opfylde $X\ell, Y\ell \leq \frac{1}{2}\ell$, så pinden bliver delt højst halvvejs oppe. Det øverste stykke får dermed længde mindst $\frac{1}{2}\ell$.

Tilsvarende hvis $X, Y \geq \frac{1}{2}$, bliver pinden delt mindst halvvejs oppe; så det nederste stykke får længde mindst $\frac{1}{2}\ell$.

Til sidst er det en mulighed at det midterste stykke får længde mindst $\frac{1}{2}\ell$. Det midterste stykke har altid længde $|X - Y|\ell$, så vi skal altså have $|X - Y| \geq \frac{1}{2}$ hvis det midterste stykke skal være for langt.

Samlet set får vi at mængden B af ikke-gunstige udfald er givet ved

$$B = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x, y \leq \frac{1}{2}\} \cup \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x, y \geq \frac{1}{2}\} \\ \cup \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x - y \geq \frac{1}{2}\} \cup \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid y - x \geq \frac{1}{2}\}.$$

Bortset fra fem enkeltpunkter¹¹, er ovenstående en disjunkt for-

¹¹Hvilket er en nulmængde.

ening (se figur 1). Vi får derfor at

$$\begin{aligned}\text{areal}(B) &= \text{areal}\{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x, y \leq \tfrac{1}{2}\} \\ &\quad + \text{areal}\{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x, y \geq \tfrac{1}{2}\} \\ &\quad + \text{areal}\{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x - y \geq \tfrac{1}{2}\} \\ &\quad + \text{areal}\{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid y - x \geq \tfrac{1}{2}\} \\ &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{4}.\end{aligned}$$

Svaret på opgaven bliver så

$$P((X, Y) \in A) = 1 - P((X, Y) \in B) = 1 - \text{areal}(B) = \tfrac{1}{4}.$$

Løsning af den supplerende opgave

Den stokastiske variabel $X \in [0, 1]$ antages stadig at være ligefordelt, og det første snit på pinden lægges i $X \cdot \ell$ som før.

Nu skal vi så være lidt forsigtige, idet andet snitpunkt kun må placeres på det længste af de to stykker. De to stykker vil have længderne $X\ell$ og $\ell - X\ell$. Det længste stykke vil derfor have længde

$$\max(X\ell, \ell - X\ell) = \max(X, 1 - X)\ell;$$

og det korte stykke vil altid have længde højst $\frac{1}{2}$ og opdeles ikke yderligere.

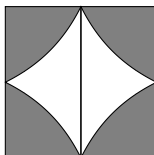
Lad nu $Y \in [0, 1]$ betegne den relative placering af andet snitpunkt langs linjestykket af længde $\max(X, 1 - X)\ell$. $Y \in [0, 1]$ er altså den relative placering af andet snitpunkt langs det længste af de første stykker; Y er derfor per antagelse ligefordelt på $[0, 1]$ *uafhængigt* af hvilken værdi X antager. Det andet snitpunkt placeres så i punktet $Y \cdot \max(X, 1 - X)\ell$ langs linjestykket af længde $\max(X, 1 - X)\ell$.

Når vi opdeler stykket $\max(X, 1 - X)\ell$ i det andet snitpunkt, får vi så to stykker af længde $Y \max(X, 1 - X)\ell$ og $(1 - Y) \max(X, 1 - X)\ell$.

Da fordelingen af Y er uafhængig af X , vil (X, Y) endnu engang være ligefordelt på $[0, 1]^2$. Vi lader igen $A \subseteq [0, 1]^2$ være mængden af udfald hvor vi *kan* danne en trekant, og vi vil igen i stedet bestemme arealet af komplementet $B := [0, 1]^2 \setminus A$.

Hvis $X = \frac{1}{2}$, vil begge de to første stykker have længde $\frac{1}{2}\ell$, så vi kan ikke danne en trekant uanset placeringen af andet snit. Vi har altså $\{\frac{1}{2}\} \times [0, 1] \subseteq B$.

For $X \neq \frac{1}{2}$, vil det korte af de to første stykker have længde mindre end $\frac{1}{2}\ell$. Den eneste måde hvorpå vi kan få et stykke af længde mindst $\frac{1}{2}\ell$ vil altså være hvis $Y \max(X, 1 - X)\ell \geq \frac{1}{2}\ell$ eller

Figur 2 Mængden B af ugunstige udfald

$(1 - Y) \max(X, 1 - X) \ell \geq \frac{1}{2} \ell$. Mængden B kan således beskrives ved

$$\begin{aligned}
 B &= \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x = \tfrac{1}{2}\} \cup \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid y \max(x, 1 - x) \geq \tfrac{1}{2}\} \\
 &\quad \cup \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid (1 - y) \max(x, 1 - x) \geq \tfrac{1}{2}\} \\
 &= \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x = \tfrac{1}{2}\} \\
 &\quad \cup \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x \leq \tfrac{1}{2}, y \geq \tfrac{1}{2(1-x)}\} \\
 &\quad \cup \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x \geq \tfrac{1}{2}, y \geq \tfrac{1}{2x}\} \\
 &\quad \cup \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x \leq \tfrac{1}{2}, 1 - y \geq \tfrac{1}{2(1-x)}\} \\
 &\quad \cup \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x \geq \tfrac{1}{2}, 1 - y \geq \tfrac{1}{2x}\}.
 \end{aligned}$$

Foreningen er disjunkt bortset fra de fire punkter $(\pm \frac{1}{2}, 0)$ og $(0, \pm \frac{1}{2})$ – se figur 2.

Mængden $\{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x = \frac{1}{2}\}$ er et linjestykke og har areal nul. De resterende fire mængder fremkommer af hinanden ved spejling i linjerne $x = \frac{1}{2}$ og $y = \frac{1}{2}$, så de har samme areal. Der gælder derfor

$$\text{areal}(B) = 4 \cdot \text{areal}\{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x \geq \tfrac{1}{2}, y \geq \tfrac{1}{2x}\}.$$

Lad $M := \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x \geq \frac{1}{2}, y \geq \frac{1}{2x}\}$, da udregner vi areal M som et dobbeltintegral:

$$\begin{aligned} \text{areal}(M) &= \int_{[0,1]^2} 1_M \, d\mu = \int_M 1 \, d\mu = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2x}}^1 1 \, dy \, dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 1 - \frac{1}{2x} \, dx = \left[x - \frac{1}{2} \log(2x) \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= (1 - \frac{1}{2} \log 2) - (\frac{1}{2} - 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2. \end{aligned}$$

Sandsynligheden for at vi kan danne en trekant af de opdelte stykker, kan så udregnes til

$$\begin{aligned} P((X, Y) \in A) &= \text{areal}(A) = 1 - \text{areal}(B) = 1 - 4 \text{areal}(M) \\ &= 1 - 4(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2) = 2 \log 2 - 1 \simeq 0,386. \end{aligned}$$