Algebraens Fundamentalsætning

Jens Siegstad

Det kanoniske bevis for algebraens fundamentalsætning benytter sig som bekendt af Liouvilles sætning. Vi skal i denne artikel give et alternativt bevis, hvor vi i stedet benytter os af "Open Mapping Theorem" (se [1] Theorem 7.6), samt et resultat om vækst af komplekse polynomier kendt som "The Growth Lemma".

Theorem 1 ***(Algebraens Fundamentalsætning)*** *Ethvert polynomium*

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 \ \ , z \in \mathbb{C}$$

med $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ *og* $a_n \neq 0$ *for* $n \geq 1$ *har et nulpunkt i* $\mathbb{C}$.

For at vise sætningen får vi behov for et lemma, der udtaler sig om, hvorledes et komplekst polynomium af grad n vokser. Sætningen siger, at for tilstrækkelig store værdier af $|z|$ er det den ledende term, $a_n z^n$, der dominerer.

Lemma 2 ***(The Growth Lemma)*** *Lad* p *betegne polynomiet*

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 \ \ , z \in \mathbb{C}$$

med $a_n, \cdots, a_0 \in \mathbb{C}$ *og* $a_n \neq 0$. *Da gælder for ethvert* $z \in \mathbb{C}$ *med egenskaben*

$$|z| \ \geq \rho := \max\left\{1, \frac{2}{|a_n|} \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|\right\}.$$

at

$$\tfrac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq \tfrac{3}{2}|a_n||z|^n$$

Bevis. Lad $q(z) = p(z) - a_n z^n$. Da får vi ved brug af trekantsuligheden for $|z| \geq \rho$ at

$$\begin{aligned}
|q(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right) |z|^{n-1} \\
&\leq \left(\tfrac{1}{2}|a_n||z| \right) |z|^{n-1} \\
&= \frac{|a_n|}{2}|z|^n.
\end{aligned}$$

Ved at benytte følgende version af trekantsuligheden

$$\Big| |z| - |w| \Big| \leq |z - w|$$

med $z = p(z)$ og $w = a_n z^n$ finder vi at

$$|a_n||z|^n - |q(z)| \leq |p(z)| \leq |a_n||z|^n + |q(z)|$$

og ved anvendelse af første ulighed finder vi at

$$\tfrac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq \tfrac{3}{2}|a_n||z|^n$$

som ønsket. □

Vi kan nu give det ønskede bevis for algebraens fundamentalsætning.

Bevis. Lad $w \in \mathbb{C}$ være et kontaktpunkt for $p(\mathbb{C})$. Da kan vi finde en følge (z_n) af komplekse tal således at $p(z_n) \to w$ for $n \to \infty$. Lemma 2 giver, at følgen (z_n) er begrænset. Da (z_n) er begrænset, har den en konvergent delfølge (z_{n_k}) med $z_{n_k} \to z$ for $k \to \infty$. Kontinuiteten af p giver nu at $p(z) = w$. Dermed har vi at $w \in p(\mathbb{C})$ og dermed er $p(\mathbb{C})$ lukket. Ved brug af "Open Mapping Theorem" finder vi at $p(\mathbb{C})$ også er åben. Da $p(\mathbb{C})$ er en ikke-tom åben og lukket delmængde af den sammenhængende mængde $\mathbb{C}$ har vi at $p(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, og specielt har vi at p har et nulpunkt. $\square$

Litteratur

[1] Christian Berg. *Complex Analysis.* Universitetsbogladen, 2010.

[2] Eberhard Freitag, Rolf Busam. *Complex Analysis.Second Edition.* Springer 2009.