Klassifikation af endeligdimensionelle moduler over semisimple Lie algebraer

Betina Jensen

Dette er en kort oversigtsartikel om dele af teorien om Lie algebraer og moduler over disse. Artiklen behandler bl.a. rodrumsdekomposition, vægtrum og klassifikation af endeligdimensionelle irreducible moduler over semisimple Lie algebraer.

Indledning

Lie algebraer er nogle algebraiske objekter, som udover at være interessante i sig selv, er relevante i forbindelse med studiet af Lie grupper. Lie grupper er mangfoldigheder, som er udstyret med en gruppestruktur. Sidstnævnte er interessante, bl.a. fordi de finder anvendelse i mange forskellige grene af matematikken, fx differentialligninger, talteori, geometri og matematisk fysik. Der er en tæt forbindelse mellem Lie algebraer og Lie grupper, så ved at studere Lie algebraer, kan vi lære noget om Lie grupper. En begrundelse for at studere Lie algebraerne i stedet for Lie grupperne er, at de er algebraiske objekter, som er "lettere" at studere, bl.a. fordi man kan benytte sig af lineær algebra. En måde at studere Lie algebraer på er at studere de moduler, en Lie algebra tillader. I denne artikel vil vi kigge på irreducible moduler over semisimple Lie algebraer.

Lie algebraer og moduler

I det følgende lader vi F betegne et legeme.

Definition 1. *En Lie algebra L over F er et vektorrum over F, udstyret med en bilineær operation $[-,-]\colon L \times L \to L$ ("bracket"), som opfylder følgende betingelser*

(a) $[x,x] = 0$ *for alle* $x \in L$
(b) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ *for alle* $x,y,z \in L$

(Den sidste betingelse i definitionen kaldes Jacobiidentiteten.)

Bemærk at (a) medfører at $-[x,y] = [y,x]$ for alle $x,y \in L$ (ses ved at benytte bilineariteten på $[x+y, x+y]$). En Lie algebra L kaldes *abelsk*, hvis $[x,y] = 0$ for alle $x,y \in L$. Til ethvert element $x \in L$ knyttes afbildningen $\operatorname{ad} x\colon L \to L$, givet ved $\operatorname{ad} x(y) = [x,y]$. Enhver Lie algebra L udstyres med bilinearformen $B_L\colon L \times L \to \mathsf{F}$, givet ved $B_L(x,y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y)$, hvor Tr betegner sporet. Denne afbildning kaldes *Killingformen*.

Definition 2. *En modul V over L er et vektorrum over F udstyret med en L–multiplikation $L \times V \to V$, betegnet $(x, v) \mapsto x.v$, med følgende egenskaber*

- $(ax + by).v = a(x.v) + b(y.v)$
- $x.(av + bw) = a(x.v) + b(x.w)$
- $[x, y].v = x.y.v - y.x.v$

for alle $x, y \in L$, $v, w \in V$ og $a, b \in \mathsf{F}$.

I resten af denne artikel antages L at være en endeligdimensionel Lie algebra over F.

Lad V og W være L–moduler. En modul–homomorfi $\varphi \colon V \to W$ er en F–lineær afbildning, som har egenskaben $\varphi(x.v) = x.\varphi(v)$ for alle $x \in L$, $v \in V$. En modul–isomorfi er en bijektiv modul–homomorfi. Vi siger at V er *irreducibel*, hvis V ikke indeholder nogen ægte undermoduler, bortset fra 0. Modulen V kaldes *fuldstændig reducibel*, hvis V kan skrives som en direkte sum af irreducible undermoduler. Med direkte sum af undermoduler, menes blot direkte sum af de underliggende vektorrum. Et element $v \in V$ kaldes *cyklisk* i V, hvis der gælder følgende: For enhver undermodul $U \subseteq V$, med $v \in U$, gælder at $U = V$.

Bemærkning 3. For enhver irreducibel L–modul V gælder at alle elementer *$v \in V \setminus \{0\}$ er cykliske i V.*

Et element x i L kaldes ad *–semisimpelt*, hvis afbildningen $\operatorname{ad} x \colon L \to L$ er diagonaliserbar. Lie algebraen L kaldes *semisimpel*, hvis Killingformen B_L er ikke–degenereret, dvs. hvis der for ethvert $x \in L$ gælder, at $B_L(x, y) = 0$ for alle $y \in L$ hvis og kun hvis $x = 0$. Hvis L er semisimpel, er enhver endeligdimensionel L–modul fuldstændig reducibel (jf. [1, thm. 6.3]).

Eksempel 4. Vi betragter vektorrummet $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, bestående af alle 2×2 matricer med værdier i $\mathbb{C}$, hvis spor er lig 0. Når vi udstyrer $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ med operationen $[-, -] \colon \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ givet ved kommutatoren $[X, Y] = XY - YX$, er det let at tjekke at $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ bliver en Lie algebra over $\mathbb{C}$. Standardbasen for $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ består af elementerne

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ og } h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser at $[h, x] = 2x$, $[h, y] = -2y$ og $[x, y] = h$. Vha. dette er det let at tjekke at $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ er semisimpel.

Rodrumsdekomposition

Vi antager nu at L er semisimpel og at F er algebraisk afsluttet og af karakteristik 0, fx $\mathsf{F} = \mathbb{C}$.

Det kan vises at der findes en Lie delalgebra i L bestående af ad–semisimple elementer (jf. [1, § 8.1]). Sådanne delalgebraer kaldes *torale*. Vi vælger en maksimal toral Lie delalgebra H i L. Det kan vises at enhver toral Lie delalgebra er abelsk (jf. [1, lemma 8.1]). Specielt ses, vha. Jacobiidentiteten, at $\operatorname{ad} H = \{ \operatorname{ad} h \mid h \in H \}$ består af kommuterende diagonaliserbare lineære afbildninger på L, og dermed kan disse diagonaliseres samtidigt. Vi sætter nu, for ethvert $\alpha \in H^*$,

$$L_\alpha = \{ x \in L \mid \operatorname{ad} h(x) = \alpha(h)x \text{ for alle } h \in H \}.$$

Idet $\operatorname{ad} h$'erne kunne diagonaliseres samtidigt, er det klart at $L = \bigoplus_{\alpha \in H^*} L_\alpha$. Vi kalder en afbildning $\alpha \in H^*$ for en *rod* og L_α for et *rodrum*, hvis både $\alpha \neq 0$ og $L_\alpha \neq 0$, og vi sætter Φ til at være mængden af rødder. Bemærk at Φ må være endelig, idet $\dim_{\mathsf{F}} L < \infty$. Det kan vises at $L_0 = H$ ([1, prop. 8.2]), og dermed får vi

$$L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha. \tag{1}$$

Bemærk at rødderne og dekompositionen ovenfor afhænger af valget af den maksimale torale Lie delalgebra. Vi kalder Φ for rodsystemet for L mht. H og (1) kaldes *rodrumsdekompositionen* af L mht. H. Rodrumsdekompositionen har mange nyttige egenskaber. Vi fremhæver nogle nedenfor – for beviser henvises til [1, kap. 8].

Sætning 5. *Med notationen ovenfor gælder:*

(*a*) $\operatorname{span}_{\mathsf{F}} \Phi = H^*$.
(*b*) *Hvis* $\alpha \in \Phi$ *så er* $-\alpha \in \Phi$.
(*c*) *For* $\alpha \in \Phi$ *og* $x_\alpha \in L_\alpha \setminus \{0\}$ *findes et* $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ *således at* x_α, y_α *og* $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ *udgør en basis for en Lie delalgebra i* L *isomorf med* $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, *via isomorfien* $x_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $h_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
(*d*) *For* $\alpha \in \Phi$ *gælder at* $\dim L_\alpha = 1$.
(*e*) *For* $\alpha \in \Phi$ *og* $c \in \mathsf{F}$ *gælder, at hvis* $c\alpha \in \Phi$ *så må* $c = \pm 1$.
(*f*) *For* $\alpha, \beta \in \Phi$, *hvor* $\alpha + \beta \in \Phi$, *gælder at* $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.

Det kan vises at der findes en basis $\Pi \subseteq \Phi$ for rodsystemet (se [1, thm. 10.1]). Dette indebærer bl.a. at enhver rod $\varphi \in \Phi$ har en entydig opskrivning $\varphi = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha$, hvor alle k_α'erne enten er positive heltal eller de alle er negative heltal. På denne måde inddeles rødderne i positive hhv. negative, alt efter om koefficienterne i den entydige opskrivning er positive eller negative. Mængden af positive rødder betegnes Φ^+ og mængden af negative rødder betegnes Φ^-. Vi indfører en ordensrelation " $\prec$ " på H^*, hvori der for de positive rødder $\varphi \in \Phi^+$ gælder at $0 \prec \varphi$; definer at $\mu \prec \lambda$ hvis og kun hvis $\lambda - \mu$ er en sum af positive rødder eller $\mu = \lambda$.

Vægtrum

Vi fortsætter med notationen fra afsnit 1. Lad V være en L–modul og sæt, for hvert $\lambda \in H^*$,

$$V_\lambda = \{\, v \in V \mid h.v = \lambda(h)v \text{ for alle } h \in H \,\}.$$

Når $V_\lambda \neq 0$ kaldes V_λ et *vægtrum* og λ kaldes en *vægt* af H på V.

Definition 6. *En maksimal vektor af vægt λ i V er en vektor $v \in V_\lambda$, hvor $v \neq 0$ og $L_\alpha.v = 0$ for alle $\alpha \in \Pi$.*

Ved at benytte den entydige opskrivning af de positive rødder som heltals–linearkombinationer af elementerne fra Π, samt sætning 5(f), kan det vises at hvis $L_\alpha.v = 0$ for alle $\alpha \in \Pi$, må også $L_\alpha.v = 0$ for alle $\alpha \in \Phi_+$. Hvis v er cyklisk i V, for en maksimal vektor v af vægt λ i V, siger vi at V er *standard cyklisk* over L med højeste vægt λ ("højeste" begrundes i sætning 7(b)).

Fastsæt, for hvert $\alpha \in \Phi$, elementer $x_\alpha \in L_\alpha \setminus \{0\}$, $y_\alpha \in L_{-\alpha} \setminus \{0\}$ og $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ som i sætning 5(c).

Sætning 7. *Lad v være en maksimal vektor af vægt λ i V og antag at v er cyklisk i V. Lad $\Phi_+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$. Da gælder*

(*a*) $V = \operatorname{span}_{\mathsf{F}}\{\, y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m}.v \mid i_\nu \in \mathbb{N}_0 \,\}$ *og* $V = \bigoplus_{\lambda \in H^*} V_\lambda$.

(*b*) *Enhver vægt μ på V kan skrives på formen $\mu = \lambda - \sum_{\alpha\in\Pi} k_\alpha \alpha$, hvor alle k_α'erne ligger i $\mathbb{N}_0$. Specielt ses at $\mu \prec \lambda$.*

(*c*) *For ethvert $\mu \in H^*$ gælder at* $\dim V_\mu < \infty$ *og* $\dim V_\lambda = 1$.

Korollar 8. *Lad v være en maksimal vektor af vægt λ i V og antag at V er irreducibel. Da er v den entydigt bestemte maksimale vektor i V, optil skalarmultiplikation.*

Sætning 9. *Lad V og W være standard cykliske L–moduler med højeste vægt λ. Hvis V og W er irreducible, da er de isomorfe.*

Sætning 10. *For ethvert $\lambda \in H^*$ findes en irreducibel standard cyklisk L–modul $V(\lambda)$ med højeste vægt λ.*

For beviser henvises til [1, thm. 20.2], [1, kor. 20.2], [1, thm. 20.3A] og [1, thm. 20.3 B].

Til ethvert $\lambda \in H^*$ findes altså en modul $V(\lambda)$ og en maksimal vektor $v_\lambda \in V(\lambda)$ af vægt λ med følgende egenskaber:

(*i*) $h.v_\lambda = \lambda(h)v_\lambda$ for alle $h \in H$.

(*ii*) $L_\alpha.v_\lambda = 0$ for alle $\alpha \in \Phi^+$.

(*iii*) v_λ er cyklisk i $V(\lambda)$.

Sæt nu

$$\Lambda^+ = \{\, \lambda \in H^* \mid \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{N}_0 \text{ for alle } \alpha \in \Pi \,\}.$$

Λ^+ kaldes mængden af *dominante heltalsvægte*.

Sætning 11. *For ethvert $\lambda \in \Lambda^+$ gælder at L–modulen $V(\lambda)$ er endeligdimensionel.*

For bevis henvises til [1, thm. 21.2].

Korollar 12. *Afbildningen $\lambda \mapsto V(\lambda)$ giver en 1–1 korrespondance mellem Λ^+ og isomorfiklasserne af endeligdimensionelle irreducible L–moduler.*

For bevis henvises til [1, korollar 21.2].

På denne måde bliver samtlige endeligdimensionelle moduler over L klassificeret. Da enhver L–modul er fuldstændig reducibel (idet L er semisimpel), dvs. kan skrives som en direkte sum af irreducible undermoduler, og da samtlige endeligdimensionelle irreducible moduler er klassificeret ovenfor, kan alle endeligdimensionelle moduler altså klassificeres (op til isomorfi).

Eksemplet $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

I dette sidste afsnit ser vi, hvordan teorien fra afsnit 1 fungerer i et konkret eksempel. Vi betragter den semisimple Lie algebra $L = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ over $\mathbb{C}$ fra eksemplet 4. Ud fra regnereglerne s. 4 er det let at se at elementet h er ad–semisimpelt og at $\mathbb{C}h$ må være maksimal toral i $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, idet torale delalgebraer er abelske. Vi sætter $H = \mathbb{C}h$. Lad $\alpha \in H^*$ være givet ved $\alpha(h) = 2$. Det er da let at se at α er en rod, at $x \in L_\alpha$ og at $y \in L_{-\alpha}$. Heraf følger specielt at $L = H \oplus L_\alpha \oplus L_{-\alpha}$. Vi ser at $\Phi^+ = \{\alpha\}$, $\Phi^- = \{-\alpha\}$ og at $\Pi = \{\alpha\}$. Heraf ses at mængden af dominante vægte bliver $\Lambda^+ = \{\, \lambda \in H^* \mid \lambda(h) \in \mathbb{N}_0 \,\}$. Vi identificerer nu H^* med $\mathbb{C}$ og Λ^+ med $\mathbb{N}_0$ (vha. afbildningernes værdi på elementet h). Korollar 12 giver, at der er en 1–1 korrespondance mellem $\mathbb{N}_0$ og mængden af isomorfiklasser af endeligdimensionelle irreducible L–moduler. Vi skal nu beskrive denne korrespondance lidt nøjere:

Lad $\lambda \in \mathbb{N}_0$ være givet og lad V være en endeligdimensionel irreducibel L–modul med højeste vægt λ (jf. korollar 12). Vælg en maksimal vektor v af vægt λ i V, dvs. et element $v \in V \setminus \{0\}$ således at $h.v = \lambda v$ og $x.v = 0$. Da V er irreducibel, må elementet v være cyklisk i V (jf. bemærkning 3). Sætning 7(a) giver at $V = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{C}} V_\mu$, så da $\dim V < \infty$, ses at $V_\mu \neq 0$ for kun endeligt mange $\mu \in \mathbb{C}$. Det er klart at $v \in V_\lambda$. Ved induktion ses at $y^n.v \in V_{\lambda - n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da kun endeligt mange af V_μ'erne er forskellige fra 0, findes altså et $N \in \mathbb{N}_0$ således at $y^N.v \neq 0$ og $y^{N+1}.v = 0$.

Lemma 13. *Elementerne v, $y.v$, $y^2.v$, …, $y^N.v$ udgør en basis for vektorrummet V.*

Bevis. Bemærk at $y^n.v = 0$ for alle $n > N$. Vi ved at elementerne v, $y.v$, $y^2.v$, …, $y^N.v$ udspænder V (jf. sætning 7(a)), så det er nok at vise lineær uafhængighed. Antag at $a_0 v + a_1 y.v + a_2 y^2.v + \cdots + a_N y^N.v = 0$ for skalarer $a_i \in \mathbb{C}$. Da må også $y^N.(a_0 v + a_1 y.v + a_2 y^2.v + \cdots + a_N y^N.v) = a_0 y^N.v = 0$, og dermed ses at $a_0 = 0$. Altså er $a_1 y.v + a_2 y^2.v + \cdots + a_N y^N.v = 0$. Dermed må også $y^{N-1}.(a_1 y.v +$

$a_2 y^2.v + \cdots + a_N y^N.v) = a_1 y^N.v = 0$, og heraf ses at $a_1 = 0$. Fortsættes på denne måde ses at alle a_i'erne må være lig med 0, og altså er elementerne v, $y.v$, $y^2.v$, $\ldots$, $y^N.v$ lineært uafhængige, som ønsket. □

Lemma 14. *Med notation som ovenfor gælder at* $\lambda = \dim V - 1$.

Beviset er en variant af beviset i [1, § 7.2]

Bevis. Vi sætter $v_{-1} = 0$, $v_0 = v$ og definerer v_i for alle $i \in \mathbb{N}$ ved at sætte $v_i = (\frac{1}{i!})y^i.v_0$. Vi starter med at vise følgende tre egenskaber:

(*a*) $h.v_i = (\lambda - 2i)v_i$
(*b*) $y.v_i = (i+1)v_{i+1}$
(*c*) $x.v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$ (for $i \geq 0$)

Vi bemærker først at $y.w \in V_{\mu-2}$ for alle $w \in V_\mu$, $\mu \in \mathbb{C}$. Ved brug af dette er det let at vise (a) ved induktion. Egenskaben (b) følger af definitionen. Vi viser nu (c) ved induktion: Induktionsstarten er let at se, ud fra definitionen af v_i. Antag nu at $x.v_{n-1} = (\lambda - (n-1) + 1)v_{n-2}$ for et givet $n \in \mathbb{N}$. Vi ser at

$$\begin{aligned}
x.v_n &= x.\frac{1}{n!}y^n.v_0 = \frac{1}{n!}x.y.(y^{n-1}.v_0) \\
&= \frac{1}{n!}(y.x.(y^{n-1}.v_0) + h.(y^{n-1}.v_0)) \quad \text{(jf. definition 2)} \\
&= \frac{1}{n}y.x.v_{n-1} + \frac{1}{n}h.v_{n-1} \\
&= \frac{1}{n}y.(\lambda - n + 2)v_{n-2} + \frac{1}{n}(\lambda - 2(n-1))v_{n-1} \quad \left(\begin{array}{l}\text{jf. (a) samt induk-}\\ \text{tionsantagelsen}\end{array}\right) \\
&= (\lambda - n + 2)\frac{1}{n}(n-1)v_{n-1} + \frac{1}{n}(\lambda - 2n + 2)v_{n-1} \quad \text{(jf. (b))} \\
&= (\lambda - n + 1)v_{n-1},
\end{aligned}$$

som ønsket.

Vi betragter nu egenskaben (c) ovenfor for $i = N + 1$. Da $v_{N+1} = 0$ får vi at $(\lambda - N)v_N = 0$. Idet $v_N \neq 0$, ser vi altså at $\lambda = N = \dim V - 1$ (jf. lemma 13). □

Litteraturliste

[1] James E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag, New York, 1978, Second printing, revised. MR MR499562 (81b:17007)