Opgaver og besvarelser

Ulrik Torben Buchholtz

Interessen for flasker synes at være dalet igen – der var kun to besvarelser. Esben Bistrup Halvorsen ('97) svarede rigtigt på opgave 2, men Søren Brander (biokemi '03) svarede rigtigt på begge opgaver, så han vinder en Mystisk Flaske!

Denne gang er den Mystiske Flaske en flaske Turtles-shots, og efter at have fundet Sara Arklint og fået udleveret sin Mystiske Flaske, kan Søren så, som den gode biokemiker han er, løbe gennem HCØs gange og råbe "Pas på! jeg har travlt! Og jeg har en Mystisk Flaske!"[1]

Sørens besvarelser lider af at været skrevet i Word, så de reproduceres ikke her. Desuden er de lidt omstændelige; i stedet får I mine/opgavestillernes udgaver.

Opgave 1 (IMO1988)

Trekant ABC er retvinklet med vinkel A ret, D er skæringspunktet mellem højden fra A og siden BC. Linjen, der forbinder centrum for de indskrevne cirkler i trekant ABD og ACD, skærer AB i K og AC i L. Vis, at arealet af trekant ABC er mindst det dobbelte af arealet af trekant AKL.

Besvarelse: Vi viser først indirekte, at $|AK| = |AL| = |AD|$. Tag K' på AB og L' på AC, så $|AK'| = |AL'| = |AD|$. Lad P være skæringspunktet mellem AD og normalen til AB gennem K'. Da er trekanterne $AK'P$ og ADB kongruente. Lad Q være centrum for den indskrevne cirkel i trekant ADB, som har radius r. Da ligger Q på vinkelhalveringslinjen for vinkel BAD i afstanden r fra AD, og Q er således også centrum for den indskrevne cirkel i trekant $AK'P$. Altså ligger Q på linjen $K'L'$. Helt analogt ligger også centrum for den indskrevne cirkel i trekant ADC på $K'L'$. Dvs. $K = K'$ og $L = L'$.

Nu følger det ønskede umiddelbart.

Opgave 2 (Putnam1981)

Lad $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være defineret ved, at $f(n)$ er antallet af 1-taller i den binære repræsentation af n. Udregn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n(n+1)}.$$

[1] Ja, dette er en henvisning til MatematikRevyen

Besvarelse: Rækken er konvergent, da $f(n) \leq \log_2(n+1)$. Lad S betegne summen. Bemærk, at $f(2n) = f(n)$ og $f(2n+1) = f(n)+1$, så vi får

$$\begin{aligned}
S &= \frac{f(1)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f(2n)}{2n(2n+1)} + \frac{f(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f(n)}{2n(n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{S}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{S}{2} + \log 2,
\end{aligned}$$

hvoraf $S = 2\log 2$.

Ny opgave

Der skal selvfølgelig være en ny opgave, som i eksamenstidens anledning ikke skal handle om matematik (eller måske alligevel). Betragt denne vittighed fra et nyere Anders And-blad:

> To spejlæg sidder i et badekar. Så siger det ene spejlæg: „Ræk mig lige sæben.“ Det andet svarer: „Sig mig, tror du, jeg er en skrivemaskine.“

Opgaven er nu at finde på den mest spændende/interessante/morsomme forklaring af pointen. Vi modtager gerne ligninger, tegninger, haikudigte eller andet og bringer de bedst egnede forslag i næste nummer.

Vi præmierer selvfølgelig det efter vores som altid på ingen måde objektive vurdering bedste bidrag med en Mystisk Flaske!